目　录

引言 ……………………………………………………………1
一、问题的提出 ……………………………………………………2
二、矩阵对策的数学模型 …………………………………………5
三、混合扩充……………………………………………………14
四、一种求解的简便方法………………………………………27
五、线性规划法…………………………………………………40
六、矩阵对策的图解法…………………………………………44
练习题……………………………………………………………48

引　言

早在1912年，E. Zermelo用集合论的方法研究过下棋，他著有《关于集合论在象棋对策中的应用》．之后，法国数学家Borel在1921年，也研究过下棋时的一些个别现象，并且引入了"最优策略"的概念．本世纪四十年代以来，由于生产与战争的需要，运筹学的各学科纷纷出现．特别是战争中兵力的调动、兵力部署、监视对方、侦察对方兵器等活动，迫切要求战争的指挥者拿出最好方案，用已有的条件去取得较大的胜利，于是对策论的数学模型很快形成了．当时，各参战国组织了大批科学家参加这项研究工作．

1944年，J. von Neumann和O. Morgenstern把这一工作提高到一个新水平．他们合著了《对策论与经济行为》(Theory of Games and Economic Behavior)．从此，对策论的研究才系统化与公理化．

矩阵对策，是整个对策论的研究基础．不管是理论研究，还是生产实践，都不能越过矩阵对策这一个"第一道大门"．近代对策论的研究，其结果再深入，也无法摆脱矩阵对策这样一个母体．矩阵对策又以研究二人对策为主题，策略的选取主要是研究有限情况．

我国劳动人民很早就认识了对策的问题，虽然没有完整的数学体系，没得出一套完整的数学方法，然而这种模型早就出现了．所谓的"齐王赛马"就是一个非常典型的例子；再如，很早就出现了"棋谱"，也都是研究对策的萌芽，只不过没有系

统化和数学化罢了.

近几年来，对策论发展很快. 例如，随机微分对策，就被应用到航天技术上. 当然，对策论的某些理论上的研究成果，目前在生产与技术方面还用不上(在矩阵对策里，这种现象较少；在无穷对策中就很多，例如列紧对策，生产上就不易找到应用的模型). 尽管如此，对策论的研究并未因此而受到影响，相反，由于理论上这部分内容较完整，因而发展的速度更快，甚至研究出了不少新的意想不到的成果.

一、问题的提出

日常生活中，我们可以看到一些相互之间的竞争、比赛性质的现象，如下棋、打扑克和球类比赛等等. 竞争的双方都各有长处，各自都有一些不足，又各有特点. 在竞赛的过程中，双方都在想方设法发挥自己的长处，尽最大可能争取竞赛后的较好的结果.

除了上述体育比赛外，军事上，战争也可以看成是竞争，是一种你死我活的斗争. 此外，还有些现象也可以看成是一种竞争. 如在运输方面，由于运输工具的不同，能够服务的项目也不同，从而创造的价值也就不同. 作为生产指挥者，在安排时，必然是希望充分发挥现有运输能力，最大限度地减少消耗，去争取创造最大的价值.

在这里，运输的指挥者(或运输部门)看成是竞赛的一方，而被服务的单位可看成是竞赛的另一方. 对被服务单位来说，他们希望付出较少的代价，得到较满意的服务.

再如，在工业生产方面，工厂中拥有一定数量的设备，能

加工不同类型的产品．不同设备单位时间内创造的价值不一样，消耗也不一样．从企业管理的角度来看，就是如何充分发挥其设备能力，减少消耗，去争取创造最多的价值．

在这里，工厂指挥者可看成是一方，自然现象的消耗、成本损失等看成是另一方．这样，两者之间也可以看成是一种竞争现象．

诸如此类的问题还很多，在农业方面，如合理施肥、农药除虫等方面，都有类似的问题．

形形色色的竞争现象中，可以抽象出哪几个本质的东西呢？

1．首先，竞争总得有对立面．例如象棋比赛中，对奕的两位象棋运动员即是比赛的对立面（或称为“对手”）；一场战争中，交战的双方就是斗争的对立面；生产斗争中，常常是人类和大自然成了对立面，等等．我们把介入竞争的对立面，称为局中人．

2．各局中人在竞争中总希望取得尽可能大的胜利，谁也不希望自己失败，至少不要败得很惨．这样，各方都在想方设法选择对付对手的“办法”，或说是选取一种“着法”，我们把这种“办法”（或“着法”）称为策略．

这里所谓策略，是指局中人在整个竞争过程中的对付对手的办法，并不是指竞争中某一步所采用的办法．如在下象棋中，“当头炮”只是作为一个策略的一个组成部分，并非一个策略．

局中人的一切可能的策略，组成该局中人的策略集合．本书中，只讨论策略集合中含有限个策略的情况．

3．竞争的结局，或是表现为胜负（输赢），或是表现为得失．这种结局称为一种“赢得”（或“支付”）．

这种竞争现象正是对策论所要研究的，称为对策现象，而上述三点则为对策的三要素.

当然，为了得到一种较好的结局，局中人如何选取策略是很重要的，下面以"齐王赛马"为例加以说明.

战国时期，齐国的国王与国内一个名叫田忌的大将进行赛马．双方约定，各自出三匹马，分别为三个等级的——即一等马(好的)、二等马(中等的)、三等马(差的)各一匹．比赛时，每次双方各从自己的三匹马中任选一匹来比，输者得付给胜者一千两黄金，一回赛三次，每匹马都参加．这里，局中人自然是齐王和田忌，两局中人的策略集合则为各自三等级马的全排列，结局是某一局中人赢得黄金一千两或三千两.

当时，三种不同等级的马相差非常悬殊，而同等级的马中，齐王的马比田忌的马要强．这样，如果齐王和田忌都是一、二、三等马依次参赛的话(即策略同为：一等马先参赛，其次二等马参赛，最后三等马参赛)，田忌就得输三千两黄金．这时，田忌的朋友给他出了个主意，让田忌用三等马去与齐王的一等马比赛，一等马对齐王的二等马，二等马对齐王的三等马．即田忌的策略是三等马先参赛，一等马次之，二等马最后，用以对付齐王的一、二、三等依次参赛．这样，结局是齐王非但没有赢得，反而输了一千两黄金．这个例子说明，局中人选取一个好策略至关重要．至于这种好策略是否能找得到？运用什么方法去找？这都是对策论里所要解决的问题，本书也将适当予以介绍.

下面再介绍几个概念：

从上述提出的问题来看，不管是赛球、下棋(可以是象棋，也可以是国际象棋)，还是齐王赛马，这种双方竞争的对策称为二人对策．在二人对策中，一个局中人的赢得等于另一局

中人的输出时，称这类二人对策为二人零和对策，赢得的数字称为对策的值．例如，在上述齐王赛马的例子中，每当齐王赢得一千两黄金时，就可看成是他的赢得为+1，这时田忌的赢得看成是−1；如果齐王输了一千两黄金，就看成它的赢得为−1，这时田忌的赢得为+1．于是，在对策的结局，双方的赢得之和等于零．这就是“零和”对策称呼的来历．

二、矩阵对策的数学模型

我们继续来讨论齐王赛马的例子．以 $\alpha_1(1, 2, 3)$ 表示齐王先用一等马，再用二等马，最后用三等马参赛．于是，齐王共有如下六个策略：

$$\alpha_1(1, 2, 3), \quad \alpha_2(1, 3, 2),$$
$$\alpha_3(2, 1, 3), \quad \alpha_4(2, 3, 1),$$
$$\alpha_5(3, 2, 1), \quad \alpha_6(3, 1, 2);$$

同理，田忌也有六个策略：

$$\beta_1(1, 2, 3), \quad \beta_2(1, 3, 2),$$
$$\beta_3(2, 1, 3), \quad \beta_4(2, 3, 1),$$
$$\beta_5(3, 2, 1), \quad \beta_6(3, 1, 2).$$

齐王的策略集合 S_1 含有六个元素，记为：

$$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_6\};$$

田忌的策略集合 S_2 也含有六个元素，记为：

$$S_2=\{\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_6\}.$$

列一个表，表示齐王的赢得(单位：千两黄金)：

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
α_1	3	1	1	1	1	−1
α_2	1	3	1	1	−1	1
α_3	1	−1	3	1	1	1
α_4	−1	1	1	3	1	1
α_5	1	1	−1	1	3	1
α_6	1	1	1	−1	1	3

如果只考虑数字表，写成如下形式：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

在数学中，这可以看成一个矩阵[1]。由于它是齐王赢得表中的数字依次抽象出来的，所以这个矩阵可称为齐王的赢得矩阵。对于二人零和对策，局中人Ⅰ的赢得矩阵给定后，两局中人就

[1] 将 $m\times n$ 个数字 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$ 排成 m 行（横排是"行"）、n 列（纵排是"列"）的矩形表：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 m 行 n 列的矩阵，可以简记成 $A=(a_{ij})$，其中 $i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。也可以记成 $A_{m\times n}$。

对于两个矩阵 $A_{m\times n}=(a_{ij})$、$B_{m\times n}=(b_{ij})$，当且仅当所有的元素对应相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ 时，才认为这两个矩阵是相等的：$A=B$。

便于各自考虑选取最优策略，以谋取最大的赢得.

为了表述方便，以后，当我们给定一个对策时，如果局中人 I 的策略集合记为 S_1，局中人 II 的策略集合记为 S_2，局中人 I 的赢得矩阵是 $\boldsymbol{A}$，这时我们把这个对策记为 Γ，具体的写为

$$\Gamma=\{\text{I, II}; S_1, S_2, \boldsymbol{A}\} \quad \text{或} \quad \Gamma=\{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}.$$

有限二人零和对策又称为矩阵对策.

下面，我们通过几个再简单些的例子，用以说明如何来选取最优策略.

[例 1] 对于一个矩阵对策 $\Gamma=\{\text{I, II}; S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$，其中

$$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad S_2=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

求双方的最优策略，并求对策的值？

解 由 $\boldsymbol{A}$ 可以看出，局中人 I 的最大赢得是 9，就是说局中人 I 总希望自己取得 9，就得出 α_3 参入对策. 然而，局中人 II 也是在考虑，因为局中人 I 有出 α_3 的心理状态，于是局中人 II 就想出 β_3 参入对策，这样不仅不能使 I 得到 9，反而得输 10 (即赢得 -10). 同样，I 也会这样想，II 有出 β_3 的心理状态，于是 I 就会出 α_4，结果 II 不但得不到 10，反而要输 6.

这样一来，双方都必然要考虑，不冒风险，考虑到对方会设法使自己得到最小收入. 所以就应当从最坏的方案中着手，去争取最好的结果.

对于局中人 I 来说，所有最坏的结果，即 $\boldsymbol{A}$ 中每一行的

最小数分别是：

$$-8,\ 2,\ -10,\ -3,$$

在这些最坏的情况中，最好的结果又是 2. 于是，局中人 I 要是出 α_2 参加对策，至少可以保证收入不会少于 2. 同样道理，对于局中人 II 来说，所有最坏的结果(即 $\boldsymbol{A}$ 中每一列的最大数，也是最多输掉的数)分别是：

$$9,\ 2,\ 6,$$

这些最坏的结果中，最好的结果(输得最小)是 2. 于是，局中人 II 要是出 β_2 参入对策，那么它最多输 2.

这就是说，局中人 I 的最优策略是 α_2，局中人 II 的最优策略是 β_2；数值 2 就是对策 Γ 的值：$V_\Gamma=2$.

把例 1 的求解过程用数学式子写出来，就是：从每一行里求出最小数，可写成

$$\min\{-6,\ 1,\ -8\}=-8,$$
$$\min\{3,\ 2,\ 4\}=2,$$
$$\min\{9,\ -1,\ -10\}=-10,$$
$$\min\{-3,\ 0,\ 6\}=-3;$$

再从这些最小的数中取最大的，可写为

$$\max\{-8,\ 2,\ -10,\ -3\}=2.$$

对于局中人 II 来说，从每一列里取最大的，可写为

$$\max\{-6,\ 3,\ 9,\ -3\}=9,$$
$$\max\{1,\ 2,\ -1,\ 0\}=2,$$
$$\max\{-8,\ 4,\ -10,\ 6\}=6;$$

再从这些最大的数中取最小的，就是

$$\min\{9,\ 2,\ 6\}=2.$$

一般地，如果对策 Γ 的赢得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

对局中人I来说，对A的每一行取其中的最小值$\min\limits_j a_{ij}$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，再从这些最小值中取最大值，得

$$\max_i \min_j a_{ij};$$

对局中人II来说，对A的每一列取其中的最大值$\max\limits_i a_{ij}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，再从这些最大值中取最小值，得

$$\min_j \max_i a_{ij}.$$

如果

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=a_{i^*j^*},$$

则α_{i^*}、β_{j^*}分别为局中人I、II的最优策略，且这一对策的值V_Γ即为

$$V_\Gamma=\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}.$$

为了表述方便，对于局中人I用α_i，局中人II用β_j进行对策，我们称(α_i, β_j)为一个局势．对于能使

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}$$

的α_{i^*}、β_{j^*}构成的局势$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$称为对策的解，而$\alpha_{i^*}$、$\beta_{j^*}$分别称为局中人I与II的最优纯策略．显然，在例1中，对策的解为(α_2, β_2)，对策的值为$V=2$.

[例2]　设有一个矩阵对策，局中人I的赢得矩阵A为

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求双方的最优纯策略，并求对策的值．

解 首先求出

$$\max_i \min_j a_{ij}=1,$$

再求出

$$\min_j \max_i a_{ij}=1,$$

由于 $\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=a_{12}=1$，所以局中人 I 的最优纯策略是 α_1，局中人 II 的最优纯策略是 β_2，对策的值 $V=1$.

下面再来看一个实例.

[例 3] 山东省济南市东郊人民公社计划种茄子、辣椒、大葱、大白菜等十一种蔬菜，种植面积为 1300 亩，但感到水、肥均不足，根据各种蔬菜的收获量及市场价格，应怎样安排各种蔬菜的种植面积，使既能满足市场供应，又保证公社能获得最大的收入.

解 首先，把问题适当简化，以利归结为一个数学问题．我们可以把水分成两种情况：足与不足，把肥分成三种情况：足够、稍缺、甚缺，这样投入每一块田的水、肥结合起来便有六种不同情况．另外，根据市场实际需要和种植情况，将各种蔬菜的种植面积分成五种不同方案，并按市价算出总收入数字(单位：元)列成下表：

方　　案	自	然	条	件		
	一	二	三	四	五	六
甲	192460	235120	278200	156360	197520	242840
乙	189560	231700	273630	155620	196600	239710
丙	192060	234799	277095	158235	198580	243280
丁	194370	237218	280751	158475	199813	245362
戊	194360	238990	281385	157835	199750	246020

这就把问题归结为二人零和对策，局中人分别为人和大自然，人有五种策略，大自然有六种策略，把上表数字抽象出来就是人的赢得矩阵。

上述赢得矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个有五行、六列的矩阵，可求得

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=158475,$$

即采用方案丁，其总收入决不少于 158475 元，而有达到 280751 元的希望。

[例 4] 给定一个矩阵对策 Γ，其赢得矩阵是

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

由于

$$\min_j a_{1j}=5,\ \min_j a_{2j}=-1,\ \min_j a_{3j}=5,\ \min_j a_{4j}=0.$$

在这些最小中去取最大，有

$$\max_i \min_j a_{ij}=a_{i^*j^*}=5,\quad i^*=1,\ 3;\ j^*=2,\ 4.$$

又由于

$$\max_i a_{i1}=8,\ \max_i a_{i2}=5,\ \max_i a_{i3}=7,\ \max_i a_{i4}=5.$$

在这些最大中去取最小，是

$$\min_j \max_i a_{ij}=a_{i^*j^*}=5,\quad i^*=1,\ 3;\ j^*=2,\ 4.$$

显然有

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=5.$$

故 $(\alpha_1,\ \beta_2)$、$(\alpha_3,\ \beta_4)$、$(\alpha_1,\ \beta_4)$、$(\alpha_3,\ \beta_2)$ 四个局势都是对策 Γ 的解，即

$$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*}) = (\alpha_1, \beta_2) = (\alpha_3, \beta_4) = (\alpha_3, \beta_2) = (\alpha_1, \beta_4).$$

由例 4 可以看到，对策的解可以不唯一，当然它的值是唯一的。

对于例 4 这样的对策，当对策的解不唯一时，它有两条重要性质：

1．无差别性．即(α_1, β_2)与(α_3, β_4)是两个解，那末也有

$$a_{12} = a_{34}.$$

一般说来：$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$，$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$是两个解，那末也有

$$a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}.$$

2．可换性．由于(α_1, β_2)，(α_3, β_4)是两个解，那末(α_1, β_4)与(α_3, β_2)也都是解．一般说来，若$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$，$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$是两个解，那末$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$与$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$也都是对策的解．

最后，我们来讨论，是否只要给定一个对策 Γ，就一定有解呢？上述例 1～例 4 都是有解的，但也有没有解的对策．例如，前述齐王赛马的对策，便是没有解的，因为在齐王的赢得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，可以算出

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1,$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = 3,$$

显然，这里的

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}.$$

所以，齐王赛马的对策中，双方没有最优纯策略．

什么情况下给定的对策有解呢？

定理　对策 $\Gamma = \{\mathrm{I}, \mathrm{II};\ S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$ 有解的充分必要条件是：存在一个纯局势$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$，对一切 $i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$，都有

$$a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j}.$$

证明　先证充分性．由于对一切 i、j 均有

$$a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j},$$

故有

$$\max_i a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant\min_j a_{i^*j},$$

而

$$\min_j\max_i a_{ij}\leqslant\max_i a_{ij^*},$$

$$\min_j a_{i^*j}\leqslant\max_i\min_j a_{ij},$$

从而可得

$$\min_j\max_i a_{ij}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant\max_i\min_j a_{ij}.$$

另外，显然有❶

$$\max_i\min_j a_{ij}\leqslant\min_j\max_i a_{ij}.$$

将上两式比较，即得

$$\max_i\min_j a_{ij}=\min_j\max_i a_{ij}=a_{i^*j^*},$$

这就证明了对策 Γ 有解 $(\alpha_{i^*},\ \beta_{j^*})$，且其值为 $a_{i^*j^*}$.

现在来证明必要性．既然对策 Γ 有解，假设 $\min\limits_j a_{ij}$ 在 $i=i^*$ 时达到最大，$\max\limits_i a_{ij}$ 在 $j=j^*$ 时达到最小，即

$$\max_i\min_j a_{ij}=\min_j a_{i^*j},$$

$$\min_j\max_i a_{ij}=\max_i a_{ij^*},$$

而

$$a_{i^*j^*}=\max_i\min_j a_{ij}=\min_j\max_i a_{ij},$$

从而有

$$a_{i^*j^*}=\min_j\max_i a_{ij}=\max_i a_{ij^*}\geqslant a_{ij^*};$$

$$a_{i^*j^*}=\max_i\min_j a_{ij}=\min_j a_{i^*j}\leqslant a_{i^*j}.$$

---

❶ 对于矩阵 $A=(a_{ij})$，显然有 $\min\limits_j a_{ij}\leqslant a_{ij}$，从而 $\max\limits_i\min\limits_j a_{ij}\leqslant\max\limits_i a_{ij}$. 由于上式右端包括了一切 j，所以也有 $\max\limits_i\min\limits_j a_{ij}\leqslant\min\limits_j\max\limits_i a_{ij}$.

这就证得了

$$a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j}$$

对一切 $i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$ 成立. 定理完全得证.

三、混 合 扩 充

前已指出，如齐王赛马的例子，就是一个没有解的对策. 再如下面的例子，也是一个没有解的对策.

[例 1] 给定一个矩阵对策 Γ，其赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

由于

$$\max_i \min_j a_{ij}=2, \quad \min_j \max_i a_{ij}=3,$$

故不满足 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\min\limits_i \max\limits_j a_{ij}$，因而 Γ 没有解，局中人 I 与 II 也就没有最优纯策略.

对于这种没有解的对策，局中人又应如何选取策略参加对策呢？这就得估计选取各个策略可能性的大小来进行对策. 数学中，把这种可能性大小用一个数字来表示，称为概率. 例如，以 30% 的可能性选取某个策略，我们就说它以概率 $\frac{30}{100}=0.3$ 选取某个纯策略.

对于例 1 来说，假定局中人 I 以概率 x 选取纯策略 α_1，以概率 $1-x$ 选取 α_2. 局中人 II 以概率 y 选取纯策略 β_1，以概率 $1-y$ 选取纯策略 β_2. 于是，对于局中人 I 来说，他的期望赢得应当是

$$E(x,\ y)=1\cdot x\cdot y+3\cdot x\cdot(1-y)$$
$$+4\cdot(1-x)\cdot y+2\cdot(1-x)\cdot(1-y)$$
$$=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{2}.$$

由上式可见，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$E(x,\ y)=\frac{5}{2}$. 就是说，当局中人 I 以概率 $\frac{1}{2}$ 选纯策略 α_1，他的赢得至少是 $\frac{5}{2}$. 但是，他并不能保证他的期望值超过 $\frac{5}{2}$. 这也是因为局中人 II 当取 $y=\frac{1}{4}$ 时，会控制局中人 I 的赢得又不会超过 $\frac{5}{2}$. 因此，$\frac{5}{2}$ 是 I 的期望值. 同样，局中人 II 只有取 $y=\frac{1}{4}$ 时，才能保证他的输出不会多于 $\frac{5}{2}$. 于是，对于例 1 来说，局中人 I 分别都以概率 $\frac{1}{2}$ 选取 α_1 与 α_2，局中人 II 分别以概率 $\frac{1}{4}$ 与 $\frac{3}{4}$ 选取 β_1 与 β_2，这时对策的双方都会得到满意的结果. 以这样一种方式选取策略参加对策，是双方的最优策略.

从刚才计算的结果，也可看出：

$$E\left(x,\frac{1}{4}\right)\leqslant E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\leqslant E\left(\frac{1}{2},y\right).$$

这里，如果把 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 看成是一个局势，显然，与第 12 页定理中的充要条件是一致的.

把刚才解例 1 的方法推广到一般，我们引出如下概念：

定义 设给定一个矩阵对策

$$\Gamma=\langle \mathrm{I},\ \mathrm{II};\ S_1,\ S_2,\ \boldsymbol{A}\rangle,$$

其中

$$S_1=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m\},\ S_2=\{\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n\},$$
$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$$

我们把纯策略集合对应的概率向量

$$X=(x_1, x_2, \cdots, x_m), x_i\geqslant 0, i=1, 2, \cdots, m; \sum_{i=1}^{m} x_i=1,$$

与

$$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n), y_j\geqslant 0, j=1, 2, \cdots, n; \sum_{j=1}^{n} y_j=1$$

分别称为局中人 I 与 II 的混合策略.

这里, x_i 看成是 I 选取 α_i 的概率; 同理, y_j 看成是 II 选取 β_j 的概率.

在纯策略情况下, 对策的解可以看成是局中人以概率为 1 去选取某个纯策略.

为了方便,我们把这种混合策略也简称为策略.

如果局中人 I 选取的(混合)策略为 X,

$$X=(x_1, x_2, \cdots, x_m),$$

局中人 II 选取的(混合)策略为 Y,

$$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

时,值

$$E(X, Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

称为局中人 I 的赢得,并叫做数学期望值; 而 (X, Y) 称为混合局势.

类似地,当存在 (X^*, Y^*),使

$$E(X, Y^*)\leqslant E(X^*, Y^*)\leqslant E(X^*, Y)$$

对一切 X 与 Y 成立, 我们就称 X^*, Y^* 分别是局中人 I 与 II 的最优(混合)策略; $E(X^*, Y^*)$ 称为对策在混合意义下的值(也简称为对策的值); (X^*, Y^*) 称为对策的解.

局中人 I 的所有混合策略的全体构成一个集合 S_1^*, 局中人 II 的所有混合策略的全体构成集合 S_2^*. 那么, 以 S_1^* 与 S_2^* 为策略集合的对策,叫混合扩充,即把对策

$$\Gamma^* = \langle \text{I}, \text{II}; S_1^*, S_2^*; E \rangle$$

称为对策 $\Gamma = \langle \text{I}, \text{II}; S_1, S_2; A \rangle$ 的混合扩充。同样，如果成立：

$$\max_X \min_Y E(X, Y) = \min_Y \max_X E(X, Y) = V,$$

值 V 叫做对策 Γ 的值。

矩阵对策混合扩充一定有解(X^*, Y^*)。X^* 与 Y^* 分别称为局中人 I 与 II 的最优策略。

定理　如果矩阵对策 Γ 的值是 V，那末以下两组不等式的解就是局中人 I 与 II 的最优策略：

$$1° \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant V, \ (j=1, 2, \cdots, n),$$

$$x_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

$$2° \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant V, \ (i=1, 2, \cdots, m),$$

$$y_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

这个定理的证明较繁，本书从略，以下通过例题来说明该定理的应用。

[例 2]　给定一个矩阵对策 Γ，其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值。

解　假设局中人 I 以概率 x_1，x_2 与 x_3 分别选取 α_1，α_2 与 α_3；局中人 II 以概率 y_1，y_2 与 y_3 分别选取 β_1，β_2 与 β_3。于是，问题化为要解如下的两组不等式组

$$
1^\circ \qquad \begin{cases} 3x_1+x_2+x_3\geqslant V, \\ x_1+x_2+4x_3\geqslant V, \\ x_1+5x_2+x_3\geqslant V; \\ x_1+x_2+x_3=1, \\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3. \end{cases}
$$

以及

$$
2^\circ \qquad \begin{cases} 3y_1+y_2+y_3\leqslant V, \\ y_1+y_2+5y_3\leqslant V, \\ y_1+4y_2+y_3\leqslant V; \\ y_1+y_2+y_3=1, \\ y_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ 3. \end{cases}
$$

为解 1° 与 2°，我们先取等号，看看是否可解出这两组方程来.

对于 1°，取等号得线性方程组，解得：

$$
x_1=\frac{-12}{-50}V=\frac{6}{25}V,
$$

$$
x_2=\frac{-8}{-50}V=\frac{4}{25}V,
$$

$$
x_3=\frac{-6}{-50}V=\frac{3}{25}V.
$$

再利用 x_1, x_2 与 x_3 是概率，和为1，可知

$$
\frac{1}{25}(6+4+3)V=1,
$$

从而应有

$$
V=\frac{25}{13}.
$$

进一步，代入 x_1, x_2, x_3 关于 V 的表达式中，可求得

$$
x_1=\frac{6}{13},\quad x_2=\frac{4}{13},\quad x_3=\frac{3}{13}.
$$

同理，

$$y_1=\frac{-12}{-50}V=\frac{6}{25}V=\frac{6}{13},$$

$$y_2=\frac{-6}{-50}V=\frac{3}{25}V=\frac{3}{13},$$

$$y_3=\frac{-8}{-50}V=\frac{4}{25}V=\frac{4}{13}.$$

解出了1°与2°后，可知局中人I的最优策略为

$$X^*=\left(\frac{6}{13},\ \frac{4}{13},\ \frac{3}{13}\right);$$

局中人II的最优策略为

$$Y^*=\left(\frac{6}{13},\ \frac{3}{13},\ \frac{4}{13}\right).$$

对策的值

$$V=\frac{25}{13}.$$

以下再举一个工业生产的例子．工厂中的不同设备(机床)可以看成是一个纯策略．可以看成是对策的一方的策略．要加工的产品(零件)可以看成是对策的另一方的策略．对策的双方可以认为是加工单位与被加工单位．运筹学里叫服务单元与被服务单元．

[例3]　有一个工厂，用三种不同的设备 α_1、α_2、α_3 加工三种不同的产品 β_1、β_2、β_3．已知这三种机床分别加工三种产品时，单位时间内创造的价值列表于下：

	β_1	β_2	β_3
α_1	4	−1	5
α_2	0	5	3
α_3	3	3	7

其中出现负值，是由于设备消耗远远大于创造出来的价值．在这样的条件下，求出一组合理的加工方案．

解 这一问题可以化为一个矩阵对策，并且在纯策略意义下是无解的．于是进行混合扩充，假定工厂采用设备 α_1 加工产品的概率是 x_1，采用设备 α_2 与 α_3 的概率分别是 x_2 与 x_3，又，产品 β_1、β_2 与 β_3 被接受加工的概率分别是 y_1、y_2 与 y_3．于是，完全类似于例 3，解如下的两不等式组：

$$
1^\circ \quad \begin{cases} 4x_1 \qquad\quad + 3x_3 \geqslant V, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geqslant V, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geqslant V; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}
$$

以及

$$
2^\circ \quad \begin{cases} 4y_1 - y_2 + 3y_3 \leqslant V, \\ \qquad\ 5y_2 + 3y_3 \leqslant V, \\ 3y_1 + 3y_2 + 7y_3 \leqslant V; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_j \geqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}
$$

对于这两不等式组，都取等号是不可能的．因为

$$
\begin{cases} 4x_1 \qquad\quad + 3x_3 = V, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = V, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = V \end{cases}
$$

和

$$
\begin{cases} 4y_1 - y_2 + 3y_3 = V, \\ \qquad\ 5y_2 + 3y_3 = V, \\ 3y_1 + 3y_2 + 7y_3 = V \end{cases}
$$

均无正数解．因此，必须考虑有的式子取等号，有的式子不取等号，再行试算．若能求得一组解，问题便得到解决．但是，这一问题要是带着不等号去求解的话，将是很麻烦的事，不知要花多大的气力，也不一定能找到合适的解．为此，

我们先给出以下的定理.

定理 给定一个矩阵对策 Γ, 赢得矩阵为 $A_{m\times n}$, 假定对策的值是 V, 局中人 I 与 II 的最优策略分别为

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)$$

与

$$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*).$$

当 $E(i, Y^*) < V$ 对任何的 i 都成立, 则必有

$$x_i^* = 0;$$

当 $E(X^*, j) > V$ 对任何 j 都成立, 则必有

$$y_j^* = 0.$$

证明 采用反证法. 假定对于某些 H 有

$$E(H, Y^*) < V$$

且

$$x_H^* \neq 0.$$

这时, 就用 x_H^* 乘上式, 得

$$E(H, Y^*)x_H^* < x_H^* V.$$

还因为 $k=1, 2, \cdots, H-1, H+1, \cdots, m$ 时, 有

$$E(k, Y^*) \leqslant V,$$

因此也有

$$E(k, Y^*)x_k^* \leqslant x_k^* V.$$

对上式两端取和, 就有

$$\sum_{i=1}^{m} E(i, Y^*)x_i^* < \sum_{i=1}^{m} x_i^* V,$$

或是

$$E(X^*, Y^*) < V\sum_{i=1}^{m} x_i^* = V.$$

这与 (X^*, Y^*) 是解的假设相矛盾, 因此必须是

$$x_H^* = 0.$$

同理, 可以证明定理的后一部分.

下面, 我们运用这个定理, 来解刚才的例 8.

先作如下的试验：先考虑以下的不等式组

$$\begin{cases} 4x_1 \qquad\quad +3x_3 > V, \\ -x_1+5x_2+3x_3=V, \\ 5x_1+3x_2+7x_3=V; \\ x_1+\ x_2+\ x_3=1, \\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

从第二、三式消去 x_2，得

$$4x_1+3x_3=1,$$

此式再与试验的方程组中的第一、三式相比较，有

$$V<1$$

与

$$2x_1+4x_3=V-3<0,$$

显然这是不合理的（因为 x_1、x_2 均为非负，故上式为负是不可能的）。

这就说明，用第一式不取等号，其他两式取等号，是不允许的．于是，必须再改换另一组．不妨再作如下的试验：取

$$1^\circ \qquad \begin{cases} 4x_1 \qquad\quad +3x_3=V, \\ -x_1+5x_2+3x_3=V, \\ 5x_1+3x_2+7x_3>V; \\ x_1+\ x_2+\ x_3=1, \\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

以及

$$2^\circ \qquad \begin{cases} 4y_1-\ y_2+3y_3<V, \\ \qquad\ \ 5y_2+3y_3=V, \\ 3y_1+3y_2+7y_3=V; \\ y_1+\ y_2+\ y_3=1, \\ y_j \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

由第 21 页的定理可知，在这样的假设下，必须有

$$y_3^*=0,\ \text{对应的}\ 5x_1+3x_2+7x_3>V;$$

$$x_1^*=0,\ \text{对应的}\ 4y_1-y_2+3y_3<V.$$

这样，方程组 1° 与 2° 就可变成如下的方程组：

1° $$\begin{cases} 3x_3=V, \\ 5x_2+3x_3=V \end{cases}$$

与

2° $$\begin{cases} 5y_2=V, \\ 3y_1+3y_2=V. \end{cases}$$

解得

$$x_2^*=0,\quad x_3^*=1,\quad y_1^*=\frac{2}{5},\quad y_2^*=\frac{3}{5};$$

$$V=\frac{14}{2}.$$

因此，局中人 I（工厂服务单位）的最优策略是

$$X^*=(0,\ 0,\ 1),$$

局中人 II（被加工的产品单位）的最优策略是

$$Y^*=\left(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ 0\right).$$

这说明，工厂在给定的价值表的情况下，不愿意采用设备 α_1 与 α_2 加工产品。因为如用这两种设备加工那样的产品，创造的价值远不能补给机器的消耗损失（如电力使用，机械磨损，工人工资，企业管理费用等）。这时，工厂决定这些设备不投入使用是合理的。

另一方面，从产品加工的单位来看，他们总是希望加工单位不要价格太高，希望付出的代价越少越好。特别是，他更希望某工厂给他加工某项产品后，非但不向他要钱，反而送给他一些副产品，这当然是被服务的单位非常乐意的事。

这个例题充分说明，企业管理中如何筹划设备的使用，是一个很值得研究的问题。

[例 4]　对齐王赛马的例，求齐王与田忌双方各自的最优策略.

解　由于齐王的赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

这个对策在纯策略意义下没有解，因此必须进行扩充. 解以下的两组不等式:

$$1^\circ\quad\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-x_4+x_5+x_6\geqslant V, \\ x_1+3x_2-x_3+x_4+x_5+x_6\geqslant V, \\ x_1+x_2+3x_3+x_4-x_5+x_6\geqslant V, \\ x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5-x_6\geqslant V, \\ x_1-x_2+x_3+x_4+3x_5+x_6\geqslant V, \\ -x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+3x_6\geqslant V; \\ \sum_{i=1}^{6}x_i=1,\ x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,6. \end{cases}$$

$$2^\circ\quad\begin{cases} 3y_1+y_2+y_3+y_4+y_5-y_6\leqslant V, \\ y_1+3y_2+y_3+y_4-y_5+y_6\leqslant V, \\ y_1-y_2+3y_3+y_4+y_5+y_6\leqslant V, \\ -y_1+y_2+y_3+3y_4+y_5+y_6\leqslant V, \\ y_1+y_2-y_3+y_4+3y_5+y_6\leqslant V, \\ y_1+y_2+y_3-y_4+y_5+3y_6\leqslant V; \\ \sum_{j=1}^{6}y_j=1,\ y_j\geqslant 0,\ j=1,\cdots,6. \end{cases}$$

对于 1° 与 2°，都完全取等号时，将所有式相加，可知

$$6(x_1+x_2+\cdots+x_6)=6V,$$
$$6(y_1+y_2+\cdots+y_6)=6V.$$

故知

$$V=1.$$

另一方面，我们又知道，双方各自选取自己的纯策略的可能性都是相等的，从而可以观察到方程组 1° 的解为

$$x_i=\frac{1}{6},\ i=1,\ \cdots,\ 6;$$

2° 的解为

$$y_j=\frac{1}{6},\ j=1,\ \cdots,\ 6.$$

显然既满足方程组的解，又满足实际要求．因此，齐王的最优策略是

$$X^*=\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right),$$

而田忌的最优策略是

$$Y^*=\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right);$$

对策的值是 1.

由此可以看出，在整个比赛过程中，双方如果都不存冒险想法，总的结局仍是齐王赢得金子．

当然，前曾指出，在某局势下田忌可赢得千金，但这只有在局中人 I 先把某一策略选定之后，再明确告诉局中人 II 他用的是那一个策略，这样，局中人 II 当然就可有针对性地去选取自己的策略的情况下才有可能，而这里的混合扩充，是在双方都不能知道对方会用那一个纯策略的情况下才有意义．

也有那样的情况，在解方程 1° 与 2° 的过程中，有时候单从解方程无法确定 x_i 与 y_j，还必须结合具体情况讨论，才可求得其解.

[例 5] 给定一个对策 Γ，其赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求解与值.

解 列出 1° 与 2°：

$$1^\circ \quad \begin{cases} 2x_1 \geqslant V, \\ x_1+x_2 \geqslant V, \\ 2x_2 \geqslant V; \\ x_1+x_2=1, \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} 2y_1+y_2 \leqslant V, \\ y_2+2y_3 \leqslant V; \\ y_1+y_2+y_3=1, \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

如果在 1° 中取等号，可知

$$1=x_1+x_2=V.$$

又，第三式与第一式相减，得

$$x_1=x_2,$$

故有

$$x_1=x_2=\frac{1}{2}.$$

由 2°，两式相加，有

$$2(y_1+y_2+y_3)=2V,$$

从而有

$$V=1,$$

又第一式与第二式相减，得

$$y_3=y_1,$$

从而又知道

$$y_2=1-2y_1\geqslant 0,$$

即必须

$$y_1\leqslant\frac{1}{2}.$$

可是

$$y_1+y_2+y_3\leqslant\frac{1}{2}+y_2+\frac{1}{2}=1,$$

即

$$1\leqslant 1+y_2\leqslant 1,$$

所以必须是

$$y_2=0.$$

这就得到，局中人I的最优策略为

$$X^*=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),$$

局中人II的最优策略是

$$Y^*=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right),$$

对策的值

$$V=1.$$

四、一种求解的简便方法

对于矩阵对策，当赢得矩阵的阶数很大时，求解、求值都是一件很困难的事，有时甚至靠笔算是不可能的．这样，是否

可以设法给出一个普遍的方法，简化所有的求解与求值过程呢？

就一般对策而言，目前尚无更好的办法，甚至要找一个较好一点的普遍方法也是困难的．然而，对于具有某些特性的对策，简便的求值方法还是有的．下面通过一些实例，介绍对一些特殊情况的简便方法．

［例 1］ 给定一个矩阵对策 Γ，其赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3&4&0&3&0\\5&0&2&5&9\\7&3&9&5&9\\4&6&8&7&6\\6&0&8&8&3\end{pmatrix},$$

求对策 Γ 的解与值．

解 由于 A 的第四行比第一行的对应元素都大，说明在对策的过程中，局中人 I 不会采用策略 α_1，这就可以看作是局中人 I 以概率为 0 选取纯策略 α_1．又由于 A 的第三行比第二行的对应元素均大（或相等），因此又可以看作是局中人 I 以概率为 0 选取纯策略 α_2．这说明局中人 I 最多能用到 α_3、α_4、α_5，因为他用这三个纯策略的任何一个收入都不会比用 α_1、α_2 小，从而局中人 I 在任何情况下都不会去用 α_1 与 α_2．所以只需考虑如下的矩阵就可以了：

$$A_1=\begin{pmatrix}7&3&9&5&9\\4&6&8&7&6\\6&0&8&8&3\end{pmatrix}.$$

另一方面，从局中人 II 的利益来看，β_3 是最不好的，肯定不能用．于是可看成是以概率为 0 选取 β_3．而 β_2 又比 β_5

好，因此任何情况下局中人II都不会舍去β_2而用β_5．于是，又可以看作是局中人II以概率为0选取β_5．又由于β_2还比β_4好，因此同样可以看作以概率为0选取β_4．这样，问题归结为考虑如下的矩阵了：

$$A_2=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix}.$$

又，从A_2来看，局中人I在任何情况下都不会用α_5．于是余下的只是看如下的矩阵了：

$$A_3=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}.$$

这样，运用混合扩充的办法，求解以下两组不等式

1°
$$\begin{cases}7x_3+4x_4\geqslant V,\\ 3x_3+6x_4\geqslant V;\\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0,\\ x_3+x_4=1.\end{cases}$$

2°
$$\begin{cases}7y_1+3y_2\leqslant V,\\ 4y_1+6y_2\leqslant V;\\ y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0,\\ y_1+y_2=1.\end{cases}$$

当我们取等号时，由1°的两式相加，有

$$10x_3+10x_4=2V,$$

从而得到

$$V=5.$$

相应的

$$x_3^*=\frac{1}{3},\quad x_4^*=\frac{2}{3}.$$

同理，解2°可得到

$$y_1^* = \frac{1}{2}, \quad y_2^* = \frac{1}{2}.$$

于是，对策 Γ 的解和值分别是：

$$X^* = \left(0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 0\right),$$

$$Y^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right);$$

$$V = 5.$$

［例 2］ 给定一个矩阵对策 Γ，其赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

求对策 Γ 的解与值.

解 由于第一行的对应元素都不超过第三行，因此，局中人 I 必然要用 α_3 代替 α_1，于是考虑以下矩阵

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

由于在 $\boldsymbol{A}_1$ 中，第一列的对应元素都不小于第三列的对应元素，于是，局中人 II 必然不会采用 β_1，而用 β_3 代替. 所以转而考察如下矩阵：

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

现在，解下列两个不等式组：

$$1^\circ \quad \begin{cases} 4x_2+2x_3+4x_4 \geqslant V, \\ 2x_2+4x_3 \qquad \geqslant V, \\ 4x_2 \qquad +8x_4 \geqslant V; \\ x_i \geqslant 0, \\ x_2+x_3 \quad +x_4=1. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} 4y_2+2y_3+4y_4 \leqslant V, \\ 2y_2+4y_3 \qquad \leqslant V, \\ 4y_2 \qquad +8y_4 \leqslant V; \\ y_j \geqslant 0, \\ y_2+y_3 \quad +y_4=1. \end{cases}$$

我们先取等号，由于 1° 中的第二式与第三式之和为

$$6x_2+4x_3+8x_4=2V,$$

即

$$3x_2+2x_3+4x_4=V.$$

上式与 1° 中的第一式比较，得

$$x_2=0.$$

所以

$$4x_3=V, \quad 8x_4=V.$$

故

$$x_3=2x_4.$$

从而有

$$x_3^*=\frac{2}{3}, \quad x_4^*=\frac{1}{3}.$$

于是有

$$X^*=\left(0,\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

同理，也有

$$Y^*=\left(0,\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

对策的值为：

$$V=\frac{8}{3}.$$

[例 3]　给定一个矩阵对策 Γ，其赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

求其最优策略及值.

解　对 $\boldsymbol{A}$ 来说，由于第四列的元素比第一列及第三列的对应元素都大，因此，对局中人 II 来说，肯定不会采用 β_4 的。进一步，也可肯定局中人 II 不会采用 β_3 的，因 β_1 代替 β_3 与 β_4，会取得好的结果．于是，余下来就是考虑以下的矩阵了：

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

又，从 A_2 中可以看出，局中人 I 不会采用 α_1，而代替 α_1 的是 α_3；而 α_2 又必然会被 α_4 所代替．因此，余下来就是只考虑以下的矩阵：

$$A_3=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

又由 A_3 可以看出，局中人 II 必然要用 β_1，而不用 β_2．从而，余下的只是以下的矩阵

$$A_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

再从 A_4 又可以看出来，局中人 I 会用 α_3，而不去用 α_4. 这样，最后就找到了最优策略是

$$X^*=(0,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$Y^*=(1,\ 0,\ 0,\ 0).$$

对策的值

$$V=2.$$

这个例子表明，先前讲的纯策略不扩充时的解，只是扩充后的一个特例，只不过是以概率为 1 而取得了那个纯策略，以概率为 0 选取其他的纯策略.

以下再介绍一种方法.

在一个矩阵对策中，把矩阵的元素普遍加上一个数，可使得对策的解不变，只是值增了一个数. 我们还是通过一个例子来加以说明.

［例 4］ 给定一个矩阵对策 Γ，其赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

求对策的解与值.

解 按前述方法，就得解如下的两不等式组：

$$1^\circ \quad \begin{cases} x_1-x_2-x_3\geqslant V, \\ -x_1-x_2+2x_3\geqslant V, \\ -x_1+3x_2-x_3\geqslant V; \\ x_i\geqslant 0, \\ x_1+x_2+x_3=1. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} y_1-y_2-y_3\leqslant V, \\ -y_1-y_2+3y_3\leqslant V, \\ -y_1+2y_2-y_3\leqslant V; \\ y_j\geqslant 0, \\ y_1+y_2+y_3=1. \end{cases}$$

由这两组不等式，我们取等号，可解得

$$x_1=\frac{6}{13},\quad x_2=\frac{3}{13},\quad x_3=\frac{4}{13},$$

$$y_1=\frac{6}{13},\quad y_2=\frac{4}{13},\quad y_3=\frac{3}{13},$$

$$V=-\frac{1}{13}.$$

如果把这一问题换成另一问题，考虑另一个矩阵对策 Γ'，其赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&4\\0&3&0\end{pmatrix}.$$

这时，解如下的两不等式组

$$1^\circ\qquad\begin{cases}2x_1\geqslant V,\\4x_2\geqslant V,\\3x_3\geqslant V;\\x_i\geqslant 0,\\x_1+x_2+x_3=1.\end{cases}$$

$$2^\circ\qquad\begin{cases}2y_1\leqslant V,\\3y_2\leqslant V,\\4y_3\leqslant V;\\y_j\geqslant 0,\\y_1+y_2+y_3=1.\end{cases}$$

解这两组不等式，我们取等号，由 1° 有

$$12x_1+12x_2+12x_3=6V+3V+4V,$$

可知 $V=\frac{12}{13}$. 于是很快就可解得

$$x_1=\frac{6}{13},\quad x_2=\frac{3}{13},\quad x_3=\frac{4}{13},$$

$$y_1=\frac{6}{13},\quad y_2=\frac{4}{13},\quad y_3=\frac{3}{13},$$

$$V=\frac{12}{13}.$$

可以看到，这组解与先前那组解是完全一样的，只是值差了一个1. 其实，后一个对策的矩阵与前一个矩阵之间的差别，在于把前面的矩阵的每个元素都加了1. 这就告诉我们，可以在矩阵的每一元素普遍加上一个数，用以简化计算.

这一方法可以推广到一般情形，这就是下面的定理.

定理 给定两个矩阵对策：

$$\Gamma_1=\langle S_1,\ S_2,\ \mathrm{I},\ \mathrm{I};\ (a_{ij})\rangle,$$

$$\Gamma_2=\langle S_1,\ S_2,\ \mathrm{I},\ \mathrm{II};\ (a_{ij}+a)\rangle,$$

其中 a 是一个常数，则两个对策的解不变，其值相差一个 a，即

$$V_2=V_1+a,$$

其中 V_1 与 V_2 分别是对策 Γ_1 与 Γ_2 的值.

证明 设给定 Γ_1 的矩阵 A_1 为

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

对策 Γ_2 的矩阵为

$$A_2=\begin{pmatrix} a_{11}+a & a_{12}+a & \cdots & a_{1n}+a \\ a_{21}+a & a_{22}+a & \cdots & a_{2n}+a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+a & a_{m2}+a & \cdots & a_{mn}+a \end{pmatrix}.$$

于是，$E_2(X,\ Y)$ 有

$$\begin{aligned} E_2(X,\ Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+a)x_iy_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}ax_iy_j. \end{aligned}$$

又因为有下式成立

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ax_i y_j = a\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\right)$$

$$= a\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(x_i\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = a\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i = a,$$

因此有

$$E_2(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) = E_1(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + a.$$

[例 5] 给定一个矩阵对策 Γ, 其赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

求解及值.

解 对于 $\boldsymbol{A}$ 来说, 含有最多的元素是 2. 于是, 根据上定理, 对 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素减去 2, 即得

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

从而转化为它的等价问题. 对 $\boldsymbol{A}_1$, 只需解如下不等式组:

$$1^\circ \qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 \geqslant V_1, \\ -4x_1 + 2x_2 \geqslant V_1, \\ 2x_1 + 4x_3 \geqslant V_1; \\ x_i \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2^\circ \qquad \begin{cases} y_1 - 4y_2 + 2y_3 \leqslant V_1, \\ -3y_1 + 2y_2 \leqslant V_1, \\ 4y_3 \leqslant V_1; \\ y_j \geqslant 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

解这两组不等式，我们知道取等号是不行的，必须取如下的两组

$$
1^{\circ}\qquad\left\{\begin{array}{l}
x_1-3x_2=V_1, \\
-4x_1+2x_2=V_1, \\
2x_1+4x_3>V_1; \\
x_i\geqslant 0, \\
x_1+x_2+x_3=1.
\end{array}\right.
$$

$$
2^{\circ}\qquad\left\{\begin{array}{l}
y_1-4y_2+2y_3<V_1, \\
-3y_1+2y_2=V_1, \\
4y_3=V_1; \\
y_j\geqslant 0, \\
y_1+y_2+y_3=1.
\end{array}\right.
$$

由 1° 与 2°，当然有两个特定的解为

$$x_1=0,\qquad y_3=0,$$

于是问题变成了解如下的两个方程组

$$\left\{\begin{array}{l}-3x_2=V_1, \\ 2x_2=V_1\end{array}\right.$$

与

$$\left\{\begin{array}{l}-3y_1+2y_2=V_1, \\ 4y_3=V_1.\end{array}\right.$$

由 $4y_3=V_1$ 可知 $V_1=0$、$x_2=0$，所以有

$$x_3=1,$$

以及

$$3y_1=2y_2.$$

所以又有

$$y_1=\frac{2}{5},\quad y_2=\frac{3}{5}.$$

最后得到解为

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=1;$$

$$y_1=\frac{2}{5},\quad y_2=\frac{3}{5},\quad y_3=0.$$

而值 V 应当是

$$V_1+2=0+2=V,$$

即对策的值为 $V=2$.

[例 6] 给定一个矩阵对策 Γ, 其赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

求解及值.

解 可将 $\boldsymbol{A}$ 变成

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix},$$

解两不等式组:

$$1^\circ\qquad\begin{cases} 2x_2+x_3\geqslant V_1,\\ x_1+2x_3\geqslant V_1,\\ 2x_1+x_2\geqslant V_1;\\ x_i\geqslant 0,\\ x_1+x_2+x_3=1.\end{cases}$$

$$2^\circ\qquad\begin{cases} y_1+2y_3\leqslant V_1,\\ 2y_1+y_3\leqslant V_1,\\ y_1+2y_2\leqslant V_1;\\ y_j\geqslant 0,\\ y_1+y_2+y_3=1.\end{cases}$$

我们先取等号. 将 1° 的三个式子相加, 可得 $V_1=1$. 于是又可解出:

$$x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=\frac{1}{3},\quad x_3=\frac{1}{3}.$$

用同样的方法，又可得到

$$y_1=\frac{1}{3},\quad y_2=\frac{1}{3},\quad y_3=\frac{1}{3}.$$

故有原来对策的值为

$$V=V_1+1=2.$$

[例 7] 有两个乒乓球队，双方各自出三个队员，对甲队来说赢得情况是

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 5\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix},$$

求这个对策的解.

解 对这个对策，可以考虑如下的矩阵

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix},$$

解以下的两不等式组：

$$1^\circ\quad \begin{cases}2x_1 \geqslant V_1,\\ 4x_2 \geqslant V_1,\\ 3x_3\geqslant V_1;\\ x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.\end{cases}$$

$$2^\circ\quad \begin{cases}2y_1 \leqslant V_1,\\ 3y_2 \leqslant V_1,\\ 4y_3\leqslant V_1;\\ y_1+y_2+y_3=1,\\ y_1,\ y_2,\ y_3\geqslant 0.\end{cases}$$

由 1° 可知，当取等号时，有

$$x_1+x_2+x_3=\frac{V_1}{2}+\frac{V_1}{4}+\frac{V_1}{3}=1.$$

从而解得：

$$V_1=\frac{12}{13},$$

$$x_1=\frac{6}{13},\quad x_2=\frac{3}{13},\quad x_3=\frac{4}{13}.$$

同理，可求得

$$y_1=\frac{6}{13},\quad y_2=\frac{4}{13},\quad y_3=\frac{3}{13}.$$

所以，最优解为

$$\boldsymbol{X}^*=\left(\frac{6}{13},\ \frac{3}{13},\ \frac{4}{13}\right),$$

$$\boldsymbol{Y}^*=\left(\frac{6}{13},\ \frac{4}{13},\ \frac{3}{13}\right);$$

对策的值为

$$V_1=\frac{12}{13}.$$

再将 1 加到 V_1 上，则得原对策的值为

$$V=1+V_1=1+\frac{12}{13}=\frac{25}{13}.$$

此解与第 17 页例 2 的结论完全一致，可见采用这方法可简化计算。

五、线性规划法

我们已经知道，对于扩充后的矩阵对策来说，求最优解就是去解下述两不等式组：

$1°$ $\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant V, \ (j=1, 2, \cdots, n);$

$$x_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

$2°$ $\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant V, \ (i=1, 2, \cdots, m);$

$$y_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

这里的 V 是：

$$V = \max_{X^* \in S_1^*} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i,$$

也有如下的

$$V = \min_{Y^* \in S_2^*} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j.$$

如果作如下的变换：对于 $1°$ 来说，

$$x'_i = \frac{x_i}{V}, \ (i=1, 2, \cdots, m).$$

于是，$1°$ 就成为：

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x'_i \geqslant 1, \ (j=1, 2, \cdots, n);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x'_i = \frac{1}{V},$$

$$x'_i \geqslant 0, \ i=1, 2, \cdots, m.$$

这样，就把问题归结为求一组满足约束条件：

$1°'$ $\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x'_i \geqslant 1, \ (j=1, 2, \cdots, n);$

$$x'_i \geqslant 0 \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

的解 $x'^*_i (i=1, 2, \cdots, m)$，使得目标函数

$$S(X'^*) = \sum_{i=1}^{m} x'^*_i$$

达到最小.

同样，对于局中人 II 来说，求最优策略问题可化为求满足约束条件：

$$2^{\circ\prime} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y'_j \leqslant 1, \quad (i=1, 2, \cdots, m);$$

$$y'_j \geqslant 0 \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

的一组解 $y_i'^*$，使得目标函数

$$S(Y'^*) = \sum_{j=1}^{n} y_j'^*$$

达到最大. 这里

$$y'_j = \frac{y_j}{V}, \ (j=1, 2, \cdots, n);$$

$$V = \min_{Y \in S_2^*} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j.$$

我们知道，这就是线性规划的典型问题.

［例 1］ 给定矩阵对策的赢得矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值.

解 用刚才讲过的理论，把它化为以下的两个线性规划问题：

$$\text{i)} \qquad \begin{cases} x'_1 + 4x'_2 + 3x'_3 \geqslant 1, \\ 3x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3 \geqslant 1, \\ 3x'_1 + \ \ x'_2 + 2x'_3 \geqslant 1; \\ x'_i \geqslant 0, \ i=1, 2, 3. \end{cases}$$

解这一组不等式，使得目标函数

$$S(X'^*) = x_1'^* + x_2'^* + x_3'^*$$

达到极小.

解 i)，得到一组解

$$x_1'^* = \frac{1}{7},\ x_2'^* = 0,\ x_3'^* = \frac{2}{7};$$

$$S(X'^*) = \frac{1}{7} + 0 + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} = \frac{1}{V}.$$

所以对策的值是

$$V = \frac{7}{3}.$$

又代回原式，求得

$$x_1^* = V x_1'^* = \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{3},$$

$$x_2^* = V x_2'^* = \frac{7}{3} \times 0 = 0,$$

$$x_3^* = V x_3'^* = \frac{7}{3}\cdot\frac{2}{7} = \frac{2}{3}.$$

因此，局中人 I 的最优策略是

$$X^* = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right).$$

同样，解另一组不等式

$$\text{ii)}\quad \begin{cases} y_1' + 3y_2' + 3y_3' \leqslant 1, \\ 4y_1' + 2y_2' + y_3' \leqslant 1, \\ 3y_1' + 2y_2' + 2y_3' \leqslant 1; \\ y_j' \geqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

解得

$$y_1'^* = \frac{1}{7},\ y_2'^* = \frac{1}{7},\ y_3'^* = \frac{1}{7}.$$

目标函数

$$S(Y'^*) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} = \frac{1}{V},$$

所以有

$$V=\frac{7}{3}.$$

又因为

$$y_1^*=V\cdot y_1'^*=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{3},$$

$$y_2^*=V\cdot y_2'^*=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{3},$$

$$y_3^*=V\cdot y_3'^*=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{3},$$

因此局中人 II 的最优策略为

$$\boldsymbol{Y}^*=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

综合上述结果，即知给定这个矩阵对策的解是

$$\boldsymbol{X}^*=\left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right),$$

$$\boldsymbol{Y}^*=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

$$V=E(\boldsymbol{X}^*,\ \boldsymbol{Y}^*)=\frac{7}{3}.$$

六、矩阵对策的图解法

这里，我们通过例题，介绍一种求矩阵对策最优策略的图解法．理论方面的证明，本书从略．

[例 1] 给定一个矩阵对策 Γ，矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 12\\ 9 & 10 & 2\end{pmatrix},$$

求最优策略与值．

解 假定局中人 I 采用的混合策略为

$$X=(x,\ 1-x),\ \ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

于是，当局中人II采用 β_1 时，局中人I的赢得是

$$2x+9(1-x)=9-7x;$$

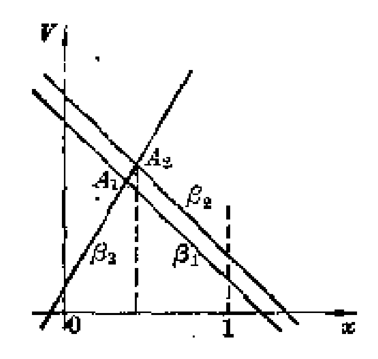
如果局中人II采用 β_2 时，局中人I的赢得是

$$3x+10(1-x)=10-7x;$$

如果局中人II采用 β_3 时，局中人I的赢得是

$$12x+2(1-x)=2+10x.$$

现在，用所得的三个方程，于区间[0, 1]上作出三条直线：



显然，对局中人I来说，他希望取到尽可能大的值．而在交点 A_1 与 A_2 处，显然 A_2 处取到的 V 比 A_1 处要大．实际上，局中人I的最优策略是由以下方程组所得到：

$$\begin{cases}9-\ 7x=V,\\ 2+10x=V.\end{cases}\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

解上方程组，得

$$x=\frac{7}{17},\ \ V=6\frac{2}{17}$$

于是，局中人I的最优策略是

$$X^{*}=\left(\frac{7}{17},\ \frac{10}{17}\right)$$

对局中人II来说，由于 β_1 对应的直线完全落于 β_2 对应

的直线之下，因此取 β_2 的概率就是 0，即 $y_2=0$. 所以，求局中人 II 的最优策略，可以由以下的矩阵中求得：

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

在不等式组中，我们取等号，则有

$$2y_1+12(1-y_1)=6\frac{2}{17},$$

$$0\leqslant y_1\leqslant 1.$$

于是，求得

$$y_1=\frac{10}{17}.$$

从而有

$$y_3=\frac{7}{17}.$$

所以，局中人 II 的最优策略是

$$Y^*=\left(\frac{10}{17},\ 0,\ \frac{7}{17}\right).$$

［例 2］ 给定矩阵对策 Γ，矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值.

解 假定局中人 I 的混合策略为

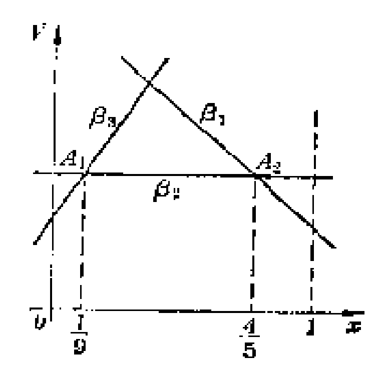
$$X=(x,\ 1-x),\ \ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

于是，当局中人 II 分别采取 β_1, β_2 与 β_3 时，局中人 I 的赢得分别是

$$\begin{aligned} 2x+7(1-x)&=7-5x\geqslant V, \\ 3x+3(1-x)&=3 \qquad\ \ \geqslant V, \\ 11x+2(1-x)&=2+9x\geqslant V; \end{aligned}$$

$$0\leqslant x\leqslant 1.$$

我们取等号，分别划出三条直线如下：



很快就得到

$$x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{5}\right].$$

说明 x 为$\left[\frac{1}{9}, \frac{4}{5}\right]$内任意点，都是局中人 I 的最优策略，即

$$\boldsymbol{X}^* = (x, 1-x), \quad x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{5}\right].$$

而局中人 II 的最优策略，应由下方程组求得：

$$\begin{cases} 2y_1+3y_2+11(1-y_1-y_2) \leqslant 3, \\ 7y_1+3y_2+2(1-y_1-y_2) \leqslant 3. \end{cases}$$

对此方程组取等号，可解得：

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{31}{31} = 1, \quad y_3 = 0.$$

于是，局中人 II 的最优策略是

$$\boldsymbol{Y}^* = (0, 1, 0).$$

由于 $y_2=1$，可知有 $3 \cdot 1 \leqslant V$，又由第一个方程组中的第 2 个式子，可知 $3 \geqslant V$，于是对策的值 $V=3$.

从刚才的两个例题可以看到，对于 $\boldsymbol{A}_{2\times m}$ 的矩阵，方法是一样的．这里仅就 $\boldsymbol{A}_{m\times 2}$ 或 $\boldsymbol{A}_{2\times m}$ 的情况给出了说明，至于一般形式的 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，这里不加讨论，因为高于三维空间的图是画不出的．

练 习 题

1. 求下列矩阵的 $\min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}$ 以及 $\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}$:

(1) $A=\begin{pmatrix}0&2&4\\1&0&2\\5&1&0\end{pmatrix}$;　　(2) $A=\begin{pmatrix}3&1&6\\1&2&3\\2&7&1\end{pmatrix}$;

(3) $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}$;　　(4) $A=\begin{pmatrix}1&-1&7\\3&-2&9\\0&1&0\end{pmatrix}$.

2. 求给定矩阵对策的最优策略与值,已知赢得矩阵是:

(1) $A=\begin{pmatrix}27&10&31\\30&1&5\end{pmatrix}$;　　(2) $A=\begin{pmatrix}11&12&12\\10&32&9\end{pmatrix}$;

(3) $A=\begin{pmatrix}4&5&4\\2&20&10\end{pmatrix}$;　　(4) $A=\begin{pmatrix}-6&2&0&19\\4&4&3&5\\-5&-3&-1&-6\end{pmatrix}$;

(5) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&3\end{pmatrix}$;　　(6) $A=\begin{pmatrix}1&3\\-2&6\end{pmatrix}$;

(7) $A=\begin{pmatrix}3&6&2&4\\2&9&1&1\end{pmatrix}$;　　(8) $A=\begin{pmatrix}4&5&2&7\\2&4&1&3\end{pmatrix}$.

3. 假定要用某台机床加工大、中、小三种零件,每一种工件都有两道工序。现在要考虑如何进行加工,能使消耗费用最省?

这个问题可以看成一个矩阵对策,假定局中人 I 是机床,局中人 II 是加工零件。局中人 I 有两个策略 x_1 与 x_2:

x_1: 每一个工件两道工序都加工完后,再加工另一个工件;

x_2: 将所有工件的第一道工序都加工完,再加工所有工件的第二道工序,

局中人 II 有三个策略.

y_1: 加工大工件;

y_2: 加工中等工件；

y_3: 加工小工件。

按如下的矩阵表示Ⅰ的赢得：

$$
\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} -100 & -200 \\ -85 & -98 \\ -95 & -90 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

求这个对策的值并求最优策略。

4．设甲乙两国进行乒乓球团体赛，每队由三个人组成一个队参加比赛．甲的人员可组成4个队，乙的人员可组成3个队．根据以往的比赛记录，可知各种组成队法，相遇会反映在下面的矩阵里(代表甲的得分)：

		第一队	第二队	第三队(乙)
(甲)	第1队	−6	1	−8
	第2队	3	2	4
	第3队	9	−1	−9
	第4队	−3	−1	6

问双方由哪个队上场是不冒风险的作法?

5．求给定矩阵对策在混合扩充后的最优策略和值，已知赢得矩阵是：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 3 & 9 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$；　　(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 10 & 0 & -8 \\ 18 & 6 & -12 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$；　　(6) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 13 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$；

(7) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$；　　(8) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 2 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(注意：(7)与(8)的解之间有何关系)

6. 用简便方法，求给定矩阵对策的解与值，已知赢得矩阵是：

(1) $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 4 & 4 & -1 \\ 8 & 8 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$；　　(2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$；

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$；　　(4) $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

7. 某厂加工一批控制柜，想在包装、发运上节省些时间。按往常情况下可有四种包装方法，分①②③④四种；运输上也有三种运输的方法，分㊀㊁㊂三种。由于包装的简易关系，运输的损坏程度，统计规律可见下表

	㊀	㊁	㊂
①	2	3	4
②	1	−7	−8
③	−1	16	−9
④	0	−3	5

有的人向调度提议采用③种包装法，希望能得到㊁种运输方法。可是调度没有采纳这种意见，而是采用了①的包装法。问①包装法好的理由何在？

8. 证明下列各题：

(1) 如果给定对策的赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

求证：1° 对策的值是 0；2° 如 (X^*, Y^*) 是解，那么 (Y^*, X^*) 也是其解。

(2) 把上题的结论推广到一般：如果赢得矩阵 A 是主对角线为 0 的反对称矩阵，即 $a_{ii}=0$，当 $i\neq j$ 时 $a_{ij}=-a_{ji}$，求证：1° 对策的值是 0；2° 如 (X^*, Y^*) 是解，那么 (Y^*, X^*) 也是其解。

(3) 给定两个对策，其赢得矩阵分别为 $A_{m\times n}=(a_{ij})$ 和 $B_{m\times n}=(ka_{ij})$，其中 $k>0$。证明：这两个对策具有相同的最优策略，且它们的值之间具有关系 $kV_A=V_B$。

9. 用线性规划的方法，求下列矩阵对应的对策的解与值：

(1) $A=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$；　　(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10．用图解法，求给定矩阵对策的解与值，已知赢得矩阵是：

(1) $\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 11\\ 7 & 5 & 2\end{pmatrix}$； (2) $\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 11\\ 7 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

11．证明下列各题：

(1) 给定一矩阵对策，其赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix},$$

证明这一对策有解，且其解是唯一确定的；然后求出其解与值．其中 $a>b>c>0$.

(2) 给定一矩阵对策，其赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix},$$

证明这一对策有唯一解．其中 $a>0$.

(3) 给定两个矩阵对策，其赢得矩阵分别为

$$A_1=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ a & 0 & 0\end{pmatrix},$$

这两对策是否有相同的解？为什么？

(4) 一个 m 阶方阵，它的每一行与每一列的元素都是由 1 到 m 的正整数组成的，这样的矩阵称为**拉丁方阵**．证明：如果一个矩阵对策的赢得矩阵为 m 阶拉丁方阵时，这一对策的值就是 $V=\dfrac{m+1}{2}$.

12．设 K 方用两个步兵营去夺取 C 方的某个据点，每一个营都可以沿道路 I 与 II 中任何一条去攻取．C 方用三个步兵营守自己的据点，可以用任何方式将三个营分配于道路 I 与 II 上去．如果在道路上 K 方一个营与 C 方一个营相遇，经过战斗，这时 K 方胜 C 方占领据点的概率为 p_1，败于 C 方而撤退的概率为 $1-p_1$．如果在道路上 K 方两个营与 C 方两个营相遇开战，这时 K 方胜 C 方攻取据点的概率为 p_2，败的概率为 $1-p_2$．如果 K 方被 C 方三个营在同一处挡住，则 K 方是当然败退．这样一来，K 方有三个策略：K_1——两个营都沿 I 攻 C，K_2——两个营都沿 II 攻 C，K_3——每条道路上各配一个营攻．而 C 方有四个策略，C_1——全部兵力守在 I 上，C_2——全部兵力守在 II 上，C_3——在 I 上部一个营，在 II 上部两个营，C_4——在 I 上部两个营，在 II 上部一个营．于是对策的

矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & p_2 \\ 1 & 0 & p_2 & 1 \\ 1 & 1 & p_1 & p_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

求双方的最优策略以及对策的值．

13． K 方派出两架轰炸机去袭击 C 方的某个设施，每一架轰炸机都带有巨大的杀伤武器．只要有一架飞到目的地，这个设施就肯定被摧毁．轰炸机可以从 I，II，III 三个方向任选一个方向接近目标．C 方可以将高射炮配置在三个方面中的任何一个方面．K 方有两个策略：K_1——两轰炸机各从一方接近目标；K_2——两架轰炸机从同一个方向接近目标．C 方有三个策略，C_1——三个方面各配置一门炮；C_2——一个方面配置两门炮，另一个方面配置一门炮，第三个方面不配置炮；C_3——三门炮全配置在同一个方面上．其对策矩阵如下：

$$\begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

求双方的最优策略．

练习题答案

1． (1) $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=2, \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=0$; (2) $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=3, \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=1$; (3) $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=2, \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=0$; (4) $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=1$. **2．** (1) (α_1, β_2)，$V=10$; (2) (α_1, β_1)，$V=11$; (3) (α_1, β_1)，$V=4$; (4) (α_2, β_3)，$V=3$; (5) (α_1, β_1)、(α_1, β_2)、(α_2, β_1)、(α_2, β_2)，$V=1$; (6) (α_1, β_1)，$V=1$; (7) (α_1, β_3)，$V=2$; (8) (α_1, β_3)，$V=2$. **3．** $V=-100$，(x_1, y_1)．**4．** 甲方第2队，乙方第二队．**5．** (1) $X^*=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$、$Y^*=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$，$V=1$; (2) $X^*=\left(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$、$Y^*=\left(0, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$，$V=\frac{2}{3}$; (3) $X^*=\left(\frac{15}{31}, \frac{6}{31}, \frac{10}{31}\right)$、$Y^*=\left(\frac{15}{31}, \frac{10}{31}, \frac{6}{31}\right)$，$V=\frac{1}{31}$; (4) $X^*=(0, 0, 1)$、$Y^*=\left(0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$，$V=0$; (5) $X^*=\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$、$Y^*=\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$，$V=1$; (6) $X^*=(0, 1, 0)$、$Y^*=(0, 0, 1, 0, 0)$，$V=2$; (7) $X^*=\left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right)$、$Y^*=$

$\left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right)$, $V=3\frac{11}{13}$; (3) $X^*=\left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right)$、$Y^*=\left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right)$, $V=3\frac{11}{13}$. **8**. (1) $X^*=\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$、$Y^*=\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V=4\frac{1}{2}$; (2) $X^*=\left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$、$Y^*=\left(0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$, $V=\frac{16}{3}$; (3) $X^*=\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$、$Y^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $V=4$; (4) $X^*=(1, 0, 0)$、$Y^*=(1, 0, 0, 0)$, $V=0$.

9. (1) $X^*=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$、$Y^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $V=\frac{9}{2}$; (2) $X^*=\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$、$Y^*=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $V=\frac{2}{3}$. **10**. (1) $X^*=\left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right)$、$Y^*=\left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$, $V=\frac{49}{11}$; (2) $X^*=(x, 1-x)$，其中$\frac{2}{9}\leqslant x\leqslant\frac{3}{5}$, $Y^*=(0, 1, 0)$, $V=4$.

12. $X^*=\left(\frac{1-p_1}{p_2-2p_1+2}, \frac{1-p_1}{p_2-2p_1+2}, \frac{p_2}{p_2-2p_1+2}\right)$、$Y^*=\left(\frac{1}{2(2+p_2-2p_1)}, \frac{1}{2(2+p_2-2p_1)}, \frac{1+p_2-2p_1}{2(2+p_2-2p_1)}, \frac{1+p_2-2p_1}{2(2+p_2-2p_1)}\right)$, $V=\frac{p_2-p_1+1}{p_2-2p_1+2}$.

13. $X^*=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$、$Y^*=(0, 1, 0)$, $V=\frac{2}{3}$.